

# Algèbre linéaire

Christophe Roland

4 avril 2014

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>2</b>
1.1	Notion intuitive de vecteur . . . . .	2
1.2	Définition . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Bases et dimension d'un espace vectoriel</b>	<b>5</b>
2.1	Combinaisons linéaires . . . . .	5
2.2	Sous-espace vectoriel . . . . .	6
2.3	Base . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Produit scalaire et espace dual</b>	<b>10</b>
3.1	Introduction . . . . .	10
3.2	Définition . . . . .	10
3.3	Espace dual . . . . .	12
3.3.1	Lien avec le produit scalaire . . . . .	13

# 1 Espaces vectoriels

## 1.1 Notion intuitive de vecteur

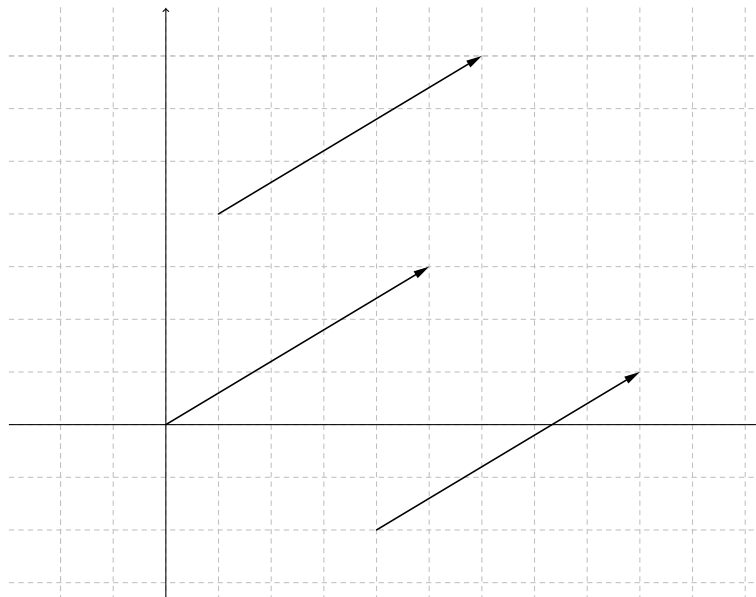
La notion intuitive de vecteur est très facile à comprendre. Il existe en effet une approche géométrique très simple, qui est celle donnée dans l'enseignement secondaire. Nous allons commencer par cette vision intuitive, mais nous allons aussi directement donner la définition la plus abstraite et générale possible, ce qui nous permettra d'utiliser ces notions dans des contextes relativement inattendus.

Mais pour l'instant nous n'en sommes pas encore là. On va considérer un vecteur comme une «flèche», c'est à dire qu'un vecteur possède trois caractéristiques :

1. une direction,
2. un sens,
3. une norme.

Il ne faut pas confondre sens et direction : une droite suffit pour donner une direction, mais on peut suivre une droite dans les deux sens possibles. La norme du vecteur, est intuitivement, la «longueur de la flèche».

Une conséquence immédiate du fait qu'il suffit de donner une direction, un sens et une norme pour définir un unique vecteur, c'est que deux flèches parallèles, de même sens et de même longueurs, définissent le même vecteur. Ainsi, sur la figure suivante :



On a trois représentations d'un seul et unique vecteur. Ainsi, il suffit par exemple de choisir le vecteur partant de l'origine. Les coordonnées de la pointe de la flèche suffisent alors à spécifier un unique vecteur. Il existe donc une correspondance biunivoque (c'est à dire une bijection) entre l'espace des points ( $\mathbb{R}^n$ ). Ainsi, on peut même considérer les points de  $\mathbb{R}^n$  comme des vecteurs !

Pour des raisons évidentes, on va convenir de noter un vecteur avec une flèche au dessus :  $\vec{v}$ , certains auteurs choisissent plutôt de mettre en gras :  $\mathbf{v}$ . Comme on a supposé que l'on peut considérer les éléments de  $\mathbb{R}^n$ , il est tentant d'écrire :

$$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

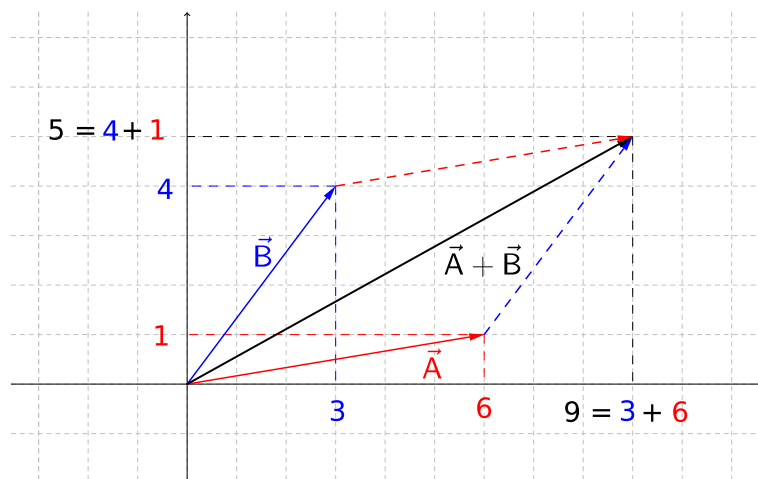
Cette écriture suggère le sens que l'on pourrait donner à l'addition de deux vecteurs. Si  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  et  $\vec{u} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ , il est tentant d'écrire :

$$\vec{v} + \vec{u} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n)$$

On voit directement que l'addition de deux vecteurs est :

- commutative c'est à dire que pour tout vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$  on ait  $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ ,
- associative c'est à dire que pour tout vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , et  $\vec{w}$ , on ait  $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$ ,
- qu'il existe un élément neutre c'est à dire qu'il existe un élément que l'on va noter  $\vec{0}$  tel que pour tout vecteur  $\vec{v}$ , on ait  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ , ici on a simplement  $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$
- et enfin qu'il existe un inverse c'est à dire que pour tout vecteur  $\vec{v}$ , il existe un vecteur que l'on convient de noter  $-\vec{v}$ , tel que  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ , si  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , alors  $-\vec{v} = (-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n)$ .

On peut donner une interprétation géométrique simple de l'addition de deux vecteurs. Sur la figure suivante, on a les vecteurs  $\vec{A} = (6, 1)$  et  $\vec{B} = (3, 4)$ , leur somme est donnée par  $\vec{A} + \vec{B} = (6+3, 1+4) = (9, 5)$ . Géométriquement, on voit que l'on peut soit transporter parallèlement la flèche représentant le vecteur  $\vec{B}$  de façon à le ramener sur l'extrémité de la flèche représentant le vecteur  $\vec{A}$ , soit faire le contraire :



Sur la figure, les flèches transportées parallèlement sont en pointillés. La représentation «en flèche» des vecteurs, permet d'exprimer cette propriété géométrique de façon algébrique. Si on note  $\vec{AB}$  le vecteur représentée par une flèche qui part du point  $A$  et arrive au point  $B$ , alors on a :

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

C'est la *relation de Chasles*.

Remarque : il est possible de définir la notion de *vecteur lié* en disant que deux points  $A$  et  $B$  définissent toujours un et un seul vecteur lié :  $\overrightarrow{AB}$ . Deux tels vecteurs liés qui définissent le même vecteur, sont dit *équipollents*.

Ayant maintenant esquissé la notion d'addition de vecteurs, nous allons passer à une autre opération très simple sur les vecteurs : la *multiplication par un scalaire*. L'idée est de pouvoir «faire varier la norme» du vecteur, donc «changer la longueur de la flèche». le terme «scalaire» vient du latin «scalaris», «scala» en latin signifiant «échelle», ainsi multiplier scalairement revient à «changer l'échelle» du vecteur.

Ainsi, si on veut par exemple multiplier la norme d'un vecteur  $\vec{v}$  par deux, on écrit tout simplement  $2\vec{v}$ . On a donc ici une notion de multiplication d'un nombre (un scalaire) par un vecteur. Une autre question, mais qu'on laisse pour plus tard, est de savoir si cela a un sens de parler de multiplication de deux vecteurs.

Précisons maintenant les opérations possible sur les scalaires. Si on a deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$ , on s'attend à ce que l'on puisse écrire, pour un certain vecteur  $\vec{v}$  :

$$\alpha\vec{v} + \beta\vec{v} = (\alpha + \beta)\vec{v}$$

C'est à dire que l'addition de deux scalaires doit avoir un sens. Bien sûr, dans notre cas particuliers où les scalaires sont simplement des nombres réels, c'est quelque chose d'évident, mais nous voulons pouvoir donner une définition générale plus tard.

De même que pour l'addition, on peut raisonnablement s'attendre à ce qu'il ait un sens à écrire :

$$\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$$

C'est à dire que la multiplication de deux scalaires doit avoir un sens. Nous avons maintenant réuni assez d'informations pour définir la notion de vecteur de façon générale.

## 1.2 Définition

**Définition 1.** *Un corps est la donnée d'un ensemble  $K$  et de deux lois de composition interne sur  $K$  appelées addition et soustraction notés respectivement  $+$  et  $\cdot$ , tel que :*

1. *L'addition et la multiplication sont commutatives.*
2. *L'addition et la multiplication sont associatives.*
3. *Existence d'un élément neutre pour l'addition, noté  $0$ , et d'un élément neutre pour la multiplication noté  $1$ .*
4. *Existence de l'élément symétrique pour l'addition et la multiplication. Soit  $\alpha \in K$ , son élément symétrique pour l'addition est noté  $(-\alpha)$  et est appelé son opposé, et son élément symétrique pour la multiplication est noté  $\alpha^{-1}$  et est appelé son inverse.*
5. *La multiplication est distributive par rapport à l'addition.*

On peut alors définir la notion d'espace vectoriel :

**Définition 2.** Soit  $K$  un corps, un  $K$ -espace vectoriel est la donnée d'un ensemble  $V$  dont les éléments sont appelés des vecteurs, et d'une loi de composition interne sur  $V$  appelé addition vectorielle et notée  $+$  et d'une loi de composition externe appelée multiplication scalaire et notée  $\cdot$ , tel que :

1. L'addition vectorielle est commutative.
2. L'addition vectorielle est associative.
3. Existence d'un élément neutre pour l'addition vectorielle, noté  $\vec{0}$ .
4. Existence de l'élément symétrique pour l'addition vectorielle (le symétrique du vecteur  $\vec{v}$  étant noté  $(-\vec{v})$ ).
5. Distribution scalaire :

$$\forall \lambda \in K, \forall \vec{v}, \vec{u} \in V, \lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$$

et :

$$\forall \vec{v} \in V, \forall \lambda, \mu \in K, \vec{v}(\lambda + \mu) = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$$

6. Élément scalaire neutre pour la multiplication scalaire :

$$\exists e \in K : \forall \vec{v} \in V, e\vec{v} = \vec{v}$$

7. La multiplication scalaire est associative :

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{v} \in V, \lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$$

Exemple. Comme nous l'avons vu,  $\mathbb{R}^n$  peut être vu comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. L'addition vectoriel et la multiplication scalaire sont très simplement définies comme nous l'avons vu dans notre approche intuitive.

Exemple. L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$  forme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, la multiplication scalaire et l'addition vectorielle étant simplement définies à partir de la multiplication et de l'addition dans  $\mathbb{R}$ .

## 2 Bases et dimension d'un espace vectoriel

### 2.1 Combinaisons linéaires

Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel, supposons une collection de  $n$  vecteurs  $\vec{v}_i \in V$  toute expression de la forme (qui représente bien sûr un vecteur de  $V$ ) :

$$\lambda^1 \vec{v}_1 + \lambda^2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda^n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{v}_i$$

où les  $\lambda^i$  sont  $n$  éléments de  $K$ , est appelée une *combinaison linéaire* des vecteurs  $\vec{v}_i$ . Il faut faire attention qu'il n'y a pas d'exponentiation dans la notation  $\lambda^i$ , le  $i$  ne sert qu'à distinguer les différents  $\lambda$ .

Note : pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec ce genre de notation pour une somme, une petite explication s'impose. Le symbole  $\Sigma$  est utilisé pour écrire une somme de façon abrégée. L'écriture :

$$\sum_{i=1}^n(\dots)$$

indique que l'on somme sur  $n$  termes, indicés par  $i$ , en faisant varier  $i$  entre 1 et  $n$ .

**Définition 3.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel,  $n$  vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  sont dit linéairement indépendants si :

$$\forall \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n \in K, \lambda^i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^n = 0$$

Dans le cas contraire, les vecteurs sont dits linéairement dépendants.

Dit autrement, toute combinaison linéaire de vecteurs linéairement indépendants donne un vecteur autre que le vecteur nul, sauf si tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls.

## 2.2 Sous-espace vectoriel

**Définition 4.** Soit  $W$  un sous-ensemble d'un  $K$ -espace vectoriel  $V$ ,  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $\vec{0} \in W$
2.  $\forall \vec{v}, \vec{u} \in W, \forall \lambda, \mu \in K, \lambda \vec{v} + \mu \vec{u} \in W$

Autrement dit, un sous-ensemble  $W$  est un sous-espace vectoriel si et seulement si le vecteur nul appartient à  $W$ , et que toute combinaison linéaire de vecteurs de  $W$  appartient encore à  $W$ .

**Théorème 1.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel,  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ , alors  $W$  est un  $K$ -espace vectoriel.

Il n'y a pas besoin de démonstration, il suffit de regarder la définition d'espace vectoriel pour voir que ce résultat est trivial. Il y a toutefois une légère subtilité. Un espace vectoriel n'est pas que la donnée d'un ensemble et d'un corps, mais aussi d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe. Il nous faut une loi de composition interne sur  $W$ , donc une application de  $W \times W$  dans  $W$  (l'addition vectorielle). Dans le théorème, on admet implicitement que l'on «réutilise» la loi de composition interne dans  $V$ , mais ce n'est clairement pas la même puisque c'est une application de  $V \times V$  dans  $V$ . Il faut donc restreindre cette application à  $W$  c'est-à-dire que si  $G$  est le graphe de la loi de composition interne sur  $V$ , alors la restriction à  $W$  a pour graphe  $G \cap ((W \times W) \times W)$ . Un raisonnement analogue s'applique à la multiplication scalaire.

**Théorème 2.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ , l'ensemble  $W$  des combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

Démonstration. Il suffit de vérifier les critères donnés au théorème précédent. Vérifions d'abord le deuxième critère. On a par hypothèse :

$$\forall \vec{w} \in W, \exists \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n \in K : \vec{w} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{v}_i$$

et donc :

$$\alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2 = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_1^i \vec{v}_i + \beta \sum_{i=1}^n \lambda_2^i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_1^i + \beta \lambda_2^i) \vec{v}_i \in W$$

où  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$  et  $\alpha, \beta \in K$ . On voit que  $\alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2$  est bien une combinaison linéaire des  $\vec{v}_i$  (avec les coefficients  $\alpha \lambda_1^i + \beta \lambda_2^i$ ) et donc appartient à  $W$ .

Vérifions maintenant le deuxième critère. Il suffit de montrer que pour tout  $\vec{v}$ , on a  $0\vec{v} = \vec{0}$  (rappelons que nous avons noté  $0$  l'élément neutre de l'addition dans  $K$ , et  $\vec{0}$  l'élément neutre de l'addition dans  $V$ ). Il faut d'abord vérifier que l'on a bien un seul élément neutre, notons  $\vec{e}$  un éventuel élément neutre différent de  $\vec{0}$ , on aurait alors :

$$\vec{e} = \vec{e} + \vec{0} = \vec{0}$$

L'élément neutre est donc unique. On a donc :

$$\vec{v} + 0\vec{v} = (1 + 0)\vec{v} = \vec{v}$$

et donc en additionnant par l'élément symétrique  $-\vec{v}$  de  $\vec{v}$ , on obtient immédiatement  $0\vec{v} = \vec{0}$ . Le deuxième critère est donc prouvé (on a en effet  $\vec{0} = \sum_i 0\vec{v}_i \in W$ ) ce qui achève la démonstration.

On dit (dans le cas du théorème) que les vecteurs  $\vec{v}_i$  engendrent  $V$  si  $W = V$ , sinon on dit que le sous-espace  $W$  est engendré par les vecteurs  $\vec{v}_i$ .

### 2.3 Base

**Définition 5.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel, on dit que les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  forment une base de  $V$  si et seulement si ils sont linéairement indépendants et s'ils engendrent  $V$ .

Ce qui nous amène au théorème suivant :

**Théorème 3.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  une base de  $V$ , et  $\vec{v} \in V$  un vecteur, alors il existe un et un seul ensemble de  $n$  scalaires  $\{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n\}$  tel que :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i$$

Démonstration. Tout d'abord, comme  $\{\vec{e}_i\}$  est une base, alors par définition n'importe quel vecteur de  $V$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{e}_i$ , il existe donc au moins un ensemble de scalaires  $\{\lambda^i\}$ . Montrons qu'il n'en existe pas d'autre.



Supposons en effet le contraire. On aurait un ensemble  $\{\mu^i\}$  différent de l'ensemble  $\{\lambda^i\}$ , tel que :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \mu^i \vec{e}_i$$

Mais alors on aurait :

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i - \sum_{i=1}^n \mu^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n (\lambda^i - \mu^i) \vec{e}_i$$

Mais alors les vecteurs  $\vec{e}_i$  ne seraient pas linéairement indépendants ce qui contredirait notre hypothèse qu'ils constituent une base.

Puisque cet ensemble de scalaires est unique, on va convenir d'appeler les  $\lambda^i$  les *composantes* de  $\vec{v}$  dans la base  $\{\vec{e}_i\}$ . L'écriture :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i$$

est appelé le *développement* de  $\vec{v}$  sur la base  $\{\vec{e}_i\}$ . On écrit alors parfois :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix}$$

Écriture bien sûr un peu abusive puisqu'elle n'a de sens que dans une base précise de  $V$ .

**Théorème 4.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel,  $\{\vec{e}_i\}$  une base de  $V$  comportant  $n$  vecteur, et  $\{\vec{f}_j\}$  un ensemble de  $m$  vecteurs linéairement indépendants. Alors  $m \leq n$ .

Démonstration. Comme  $\{\vec{e}_i\}$  est une base de  $V$ , on peut développer l'un des  $\vec{f}_j$  (disons par exemple  $\vec{f}_1$ ) sur cette base :

$$\vec{f}_1 = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i$$

Comme les  $\lambda^i$  ne sont pas tous nuls, on peut supposer (quitte à ré-indexer) que  $\lambda^1 \neq 0$ , et donc on peut exprimer  $\vec{e}_1$  comme un combinaison linéaire des autres vecteurs  $\vec{e}_i$  et de  $\vec{f}_1$  :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\lambda^1} \vec{f}_1 - \sum_{i=2}^n \frac{\lambda^i}{\lambda^1} \vec{e}_i$$

Choisissons maintenant un vecteur quelconque  $\vec{v} \in V$ . On doit pouvoir le développer sur la base  $\{\vec{e}_i\}$ , on a alors :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i \vec{e}_i = v^1 \left[ \frac{1}{\lambda^1} \vec{f}_1 - \sum_{i=2}^n \frac{\lambda^i}{\lambda^1} \vec{e}_i \right] + \sum_{i=2}^n v^i \vec{e}_i = \frac{v^1}{\lambda^1} \vec{f}_1 + \sum_{i=2}^n \left( v^i - \frac{v^1 \lambda^i}{\lambda^1} \right) \vec{e}_i$$

Ce qui montre qu'un vecteur quelconque de  $V$  peut toujours s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{f}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ . Ces vecteurs engendrent donc  $V$ .

On peut continuer de la même manière, et remplacer  $\vec{e}_2$  par  $\vec{f}_2$  et obtenir encore un ensemble de vecteurs qui engendrent  $V$ , puis de même en remplaçant  $\vec{e}_3$  par  $\vec{f}_3, \dots$ , et ainsi de suite. Raisonnons par récurrence en supposant  $m > n$ , et montrons que l'on arrive à une contradiction. Supposons que nous ayons formé l'ensemble  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ , qui engendre  $V$ . Comme il engendre  $V$ , on doit pouvoir écrire :

$$\vec{f}_{k+1} = \sum_{i=1}^k \mu^i \vec{f}_i + \sum_{i=k+1}^n \nu^i \vec{e}_i$$

On ne peut pas avoir tout les  $\nu^i$  nuls, sinon on aurait exprimé  $\vec{f}_{k+1}$  comme une combinaison linéaire des autres vecteurs  $\vec{f}_i$ , ce qui contredirait notre hypothèse. On peut donc supposer  $\nu^{k+1} \neq 0$  quitte à ré-indexer. On peut alors exprimer  $\vec{e}_{k+1}$  comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{f}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n$  :

$$\vec{e}_{k+1} = \frac{1}{\nu^{k+1}} \vec{f}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\mu^i}{\nu^{k+1}} \vec{f}_i - \sum_{i=k+2}^n \frac{\nu^i}{\nu^{k+1}} \vec{e}_i$$

Comme  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$  engendre  $V$ , on doit pouvoir écrire pour  $\vec{v} \in V$  quelconque :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k v^i \vec{f}_i + \sum_{i=k+1}^n v^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^k v^i \vec{f}_i + \sum_{i=k+2}^n v^i \vec{e}_i + v^{k+1} \left[ \frac{1}{\nu^{k+1}} \vec{f}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\mu^i}{\nu^{k+1}} \vec{f}_i - \sum_{i=k+2}^n \frac{\nu^i}{\nu^{k+1}} \vec{e}_i \right]$$

Soit :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k \left( v^i - \frac{v^{k+1} \mu^i}{\nu^{k+1}} \right) \vec{f}_i + \frac{v^{k+1}}{\nu^{k+1}} \vec{f}_{k+1} + \sum_{i=k+2}^n \left( v^i - \frac{v^{k+1} \nu^i}{\nu^{k+1}} \right) \vec{e}_i$$

Ce qui montre bien que l'ensemble  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n\}$  engendre  $V$ . Comme on a supposé (par l'absurde) que  $m > n$ , on en arrive à former l'ensemble  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$  qui engendre  $V$ . Mais alors on doit avoir que  $\vec{f}_{n+1}$  doit pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ , ce qui contredit notre hypothèse. On a donc bien  $m \leq n$  ce qui achève la démonstration.

**Théorème 5.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel,  $\{\vec{e}_i\}$  une base de  $V$  comportant  $n$  vecteur, et  $\{\vec{f}_j\}$  une autre de base de  $V$  comportant  $m$  vecteurs, alors  $n = m$ .

Démonstration. Par le théorème précédent, appliqué à chacune des base, on doit avoir à la fois  $n \leq m$  et  $n \geq m$ , donc on a  $m = n$ .

On a donc, pour un espace vectoriel donné, un nombre particuliers (le nombre de vecteurs dans une de cet espace vectoriel), que l'on va appeler la *dimension* de cet espace. Si l'espace vectoriel  $V$  a pour dimension  $n$ , on va noter :

$$n = \dim(V)$$

Exemple.  $\mathbb{R}^2$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension deux. En effet, il est facile de voir que  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  et  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  forment une base. En effet, un élément quelconque de  $\mathbb{R}^2$  s'écrit  $(a, b)$ , qui peut être développée sur cette base :  $(a, b) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ . Par un raisonnement similaire, on peut facilement voir que  $\mathbb{R}^n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

Considérons maintenant le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On peut voir intuitivement qu'aucun ensemble fini de ces fonctions ne peut engendrer l'espace vectoriel. En effet, dans une base hypothétique de cet espace, avec un nombre fini d'éléments, si certains vecteurs de base sont des fonctions polynomiales, alors il y a une de ces fonctions polynômes dont le degré  $p$  est supérieur ou égale à celui de toutes les autres. On voit mal alors comment on pourrait développer une fonction polynôme de degré  $q > p$  sur cette base.

De tels espaces vectoriels seront alors dit de dimension infinie. Sauf mention contraire, nous travaillerons toujours avec des espaces vectoriels de dimension finie.

### 3 Produit scalaire et espace dual

#### 3.1 Introduction

Nous allons dans la suite utiliser la *convention d'Einstein*, qui nous permet d'omettre le signe de sommation : on va convenir que tout symbole à la fois en indice et en exposant est un indice de sommation. Par exemple, le développement d'un vecteur  $\vec{v}$  sur une base  $\{\vec{e}_i\}$  va s'écrire :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i \vec{e}_i = v^i \vec{e}_i$$

Et on conviendra d'utiliser la même lettre pour la notation d'un vecteur et de ses composantes (par exemple les composantes de  $\vec{v}$  seront toujours, sauf mention contraire, notée  $v^i$ ).

Nous allons définir une nouvelle opérations, valable sur les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels (en fait pas seulement mais nous allons ici nous restreindre à ce cas). Cette opération, appelée *produit scalaire*, va faire correspondre à tout couple de vecteur un nombre réel.

#### 3.2 Définition

**Définition 6.** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, un produit scalaire sur  $V$ , est une fonction de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$ , que l'on note  $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$  ou  $\vec{v} \cdot \vec{u}$ , telle que :

1.  $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V, \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$  (commutativité)
2.  $\forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda \vec{v} + \mu \vec{u}) \cdot \vec{w} = \lambda \vec{v} \cdot \vec{w} + \mu \vec{u} \cdot \vec{w}$  (linéarité)

Choisissons une base de  $V$ , qu'on va noter  $\{\vec{e}_i\}$ , et définissons sur  $V$  un produit scalaire. Supposons que nous connaissions tout les produits scalaires entre les différents vecteurs de la base, notons alors  $g_{ij}$  le produit scalaire du vecteur  $\vec{e}_i$  par le vecteur  $\vec{e}_j$  :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

Notez que le produit scalaire est commutatif, on doit avoir  $g_{ij} = g_{ji}$ .

Soit alors deux vecteurs,  $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$  et  $\vec{u} = u^j \vec{e}_j$ , leur produit scalaire peut s'écrire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (v^i \vec{e}_i) \cdot (u^j \vec{e}_j) = v^i u^j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = g_{ij} v^i u^j$$

Ce qui montre que la connaissance des nombres  $g_{ij}$  suffit pour calculer le produit scalaire entre deux vecteurs quelconques. Il faut faire attention aussi que dans la formule  $\vec{v} \cdot \vec{u} = g_{ij} v^i u^j$ , il y a une sommation sur deux indices :  $i$  et  $j$ . Prenons un exemple à deux dimensions :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = g_{ij} v^i u^j = g_{11} v^1 u^1 + g_{12} v^1 u^2 + g_{21} v^2 u^1 + g_{22} v^2 u^2$$

**Définition 7.** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, ce produit scalaire est dit non-dégénéré si on a :

$$\forall \vec{v} \in V, (\forall \vec{u} \in V, \vec{v} \cdot \vec{u} = 0) \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

Ce n'est pas toujours le cas. Supposons, en utilisant encore les produits scalaires des vecteurs de base  $g_{ij}$ , que l'on ait (on se met en dimension deux)  $g_{11} = -1, g_{22} = 1, g_{12} = g_{21} = 0$ , alors, le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même donne :

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = g_{ij} v^i v^j = -1 v^1 v^1 + 1 v^2 v^2 = 0$$

**Définition 8.** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, le produit scalaire est dit défini positif si :

$$\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$$

Dans le cas où le produit scalaire est défini positif, on appelle la *norme* d'un vecteur  $\vec{v}$  la quantité :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Soient deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$ , ils sont dit *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul :  $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ .

Ceci nous amène alors à la définition de *base orthonormée*. Une base orthonormée est une base constituée de vecteurs normés (i.e. de norme un) et telles que deux vecteurs de bases différents soient toujours orthogonaux. Autrement dit, les nombres  $g_{ij}$  sont donnés par :  $g_{ij} = 1$  pour  $i = j$ , et  $g_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ . Dans cette base, le produit scalaire de deux vecteurs quelconques  $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$  et  $\vec{u} = u^i \vec{e}_i$  se calcule très facilement :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = g_{ij} v^i u^j = \sum_i v^i u^i$$

Par exemple, dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ , notons cette fois  $(x_v, y_v, z_v)$  les composantes de  $\vec{v}$  et  $(x_u, y_u, z_u)$  les composantes de  $\vec{u}$ , alors on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = x_v x_u + y_v y_u + z_v z_u$$

### 3.3 Espace dual

**Définition 9.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel, l'espace dual de  $V$ , noté  $V^*$ , est l'ensemble des applications  $\omega$  de  $V$  dans  $K$  qui sont linéaires, c'est à dire telles que :

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{v}, \vec{u} \in V, \omega(\lambda \vec{v} + \mu \vec{u}) = \lambda \omega(\vec{v}) + \mu \omega(\vec{u})$$

La linéarité des éléments de l'espace dual nous permet de calculer son action sur un vecteur quelconque, connaissant son action sur les vecteurs de base. En effet, on a :

$$\omega(\vec{v}) = \omega(v^i \vec{e}_i) = v^i \omega(\vec{e}_i) = v^i \omega_i$$

en posant  $\omega_i = \omega(\vec{e}_i)$ .

**Théorème 6.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel, l'espace dual de  $V$  est aussi un  $K$ -espace vectoriel, si l'addition et la multiplication scalaire sont définies par :

1.  $\forall \vec{v} \in V, \forall \omega, \eta \in V^*, (\omega + \eta)(\vec{v}) = \omega(\vec{v}) + \eta(\vec{v})$
2.  $\forall \lambda \in K, \forall \vec{v} \in V, \forall \omega \in V^*, (\lambda \omega)(\vec{v}) = \lambda(\omega(\vec{v}))$

Il suffit de vérifier les critères pour avoir un espace vectoriel pour voir que c'est évident. Par exemple, il est clair que la combinaison linéaire de deux éléments de  $V^*$  est encore un élément de  $V^*$ . Comme  $V^*$  est un espace vectoriel, ses éléments seront appelés *vecteurs duaux*.

On a écrit précédemment l'action d'un vecteur dual sur un vecteur :  $\omega(\vec{v}) = v^i \omega_i$  avec  $\omega_i = \omega(\vec{e}_i)$ . Définissons alors la *base duale*  $\{\theta^i\}$  de la base  $\{\vec{e}_i\}$  en demandant que l'on ait :

$$\theta^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i$$

où  $\delta_j^i$  est le *symbole de Kronecker* qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 si  $i \neq j$ . On a alors :

$$\omega(\vec{v}) = v^i \omega_i = v^j \omega_j \delta_j^i = v^j \omega_j \theta^i(\vec{e}_j) = \omega_j \theta^i(v^j \vec{e}_j) = \omega_j \theta^i(\vec{v})$$

On a donc :

$$\omega = \omega_i \theta^i$$

Ce qui justifie l'appellation de base duale, puisque tout vecteur dual peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs duaux  $\{\theta^i\}$  et que les vecteurs duaux sont linéairement indépendants. Pour montrer ce dernier point, notons d'abord que le vecteur nul de  $V^*$  est l'application qui à tout  $\vec{v} \in V$  associe le nombre zéro. Construisons alors une combinaison linéaire des vecteurs de la base duale, faisons là agir sur un vecteur  $\vec{v} \in V$  quelconque, et demandons que cette combinaison linéaire soit le vecteur nul :

$$\lambda_i \theta^i(v^j \vec{e}_j) = \lambda_i v^j \delta_j^i = \lambda_i v^i = 0$$

Comme ceci doit être vrai pour tout  $\vec{v} \in V$ , on doit avoir tous les  $\lambda_i$  nuls.  $\{\theta^i\}$  est donc bien une base de  $V^*$ , et on voit immédiatement qu'il y a autant de vecteurs (duaux) dans la base duale qu'il y en a dans la base de départ  $\{\vec{e}_i\}$ . On a donc déjà prouvé le théorème suivant :

**Théorème 7.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel, et  $V^*$  son dual, alors on a :

$$\dim(V) = \dim(V^*)$$

On peut maintenant s'intéresser au dual du dual  $V^{**}$ . On peut identifier chaque vecteur de  $V$  avec un vecteur de  $V^{**}$ . En effet, soit  $\vec{v} \in V$ ,  $\omega \in V^*$ , et  $\bar{v} \in V^{**}$  que l'on identifie à  $\vec{v}$ , on peut écrire :

$$\omega(\vec{v}) = \bar{v}(\omega)$$

On peut donc assimiler  $V$  à  $V^{**}$ . Cela veut dire donc que  $V$  est le dual de  $V^*$ . Dans nos notations, nous avons mis une flèche sur les vecteurs, et non sur les vecteurs duaux pour les différencier. Mais on voit ici que l'on aurait très bien pu inverser les rôles : cette notation ne doit pas faire croire que les éléments de  $V$  et de  $V^*$  ne sont pas sur un pied d'égalité.

### 3.3.1 Lien avec le produit scalaire

Supposons que sur  $V$  on ait défini un produit scalaire. Alors, à chaque vecteur  $\vec{v}$  on peut faire correspondre un et seul vecteur dual  $v$  défini par :

$$\forall \vec{u} \in V, v(\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

On peut donc établir dans ce cas une bijection entre  $V$  et  $V^*$ . Soit alors  $v_i$  les composantes du vecteur dual correspondant au vecteur  $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$ , alors on peut écrire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v(\vec{u}) = v_i \theta^i(u^j \vec{e}_j) = v_i u^j \delta_j^i = v_i u^i$$